

Fastnormale Untergruppen klassenfiniter Gruppen

von

Helmut Meyn

aus

Berlin

Fastnormale Untergruppen klassenfiniter Gruppen

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Helmut Meyn

aus

Berlin

Als Dissertation genehmigt von der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung : 4. Juni 1969
Dekan : Prof. Dr. H. Wegener
Erstberichterstatter : Prof. Dr. W. Specht
Zweitberichterstatter : Prof. Dr. H. Bauer

Inhalt

	Vorwort	1
O	Bezeichnungsweisen und Notationen	4
I	Fastnormale Untergruppen	8
II	Fastnormale p -Sylowgruppen	19
III	Klassenfinite Gruppen	29
	Literaturverzeichnis	46

Vorwort

Bei der Untersuchung unendlicher Gruppen spielen eine wesentliche Rolle der Nachweis bzw. das Aufstellen gewisser Endlichkeitsbedingungen (s.[20]). Bei diesen kann man grob zwei Typen unterscheiden:

- (i) Endlichkeitsbedingungen, die von endlichen Gruppen aus trivialen Gründen erfüllt werden (z.B. endlich-erzeugbar, ordnungsfinis oder klassenfinis).
- (ii) Endlichkeitsbedingungen, die ausführlich erforschten Eigenschaften endlicher Gruppen entspringen (z. B. lokal-auflösbar oder lokal-nilpotent).

Am Eingang unserer Untersuchungen steht eine Endlichkeitsforderung vom Typ (i). Wir nennen zwei Untergruppen $U \leq G$ und $V \leq G$ fastgleich, wenn beide Indizes $|U : U \cap V|$ und $|V : V \cap U|$ endlich sind.

Ausgehend von diesem einfachen Äquivalenzbegriff werden in I verschiedenen Begriffen der Gruppentheorie ihre zugehörigen "Fastbegriffe" zugeordnet. Insbesondere werden mehrere Abschwächungen der Normalität von Untergruppen angegeben und miteinander verglichen. Durch Hinzunahme weiterer Bedingungen vom Typ (i) oder (ii) erhält man entsprechend engere Beziehungen.

Als besonders geeignetes Objekt im Rahmen dieser Untersuchungen erweist sich die Theorie der p -Sylowgruppen. In II beschäftigen wir uns deshalb mit fastnormalen p -Sylowuntergruppen von zunächst beliebigen Gruppen. Es stellt sich dann heraus, daß die verschiedenen Abschwächungen der Normalität von p -Sylowgruppen für die klas-

senfiniten Gruppen zusammenfallen. Eines der Resultate ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von KARGAPOLOW [8] über die Konjugiertheit von p -Sylowgruppen in lokal-normalen Gruppen. Wir beweisen nämlich II.18.:

In einer klassenfiniten Gruppe existieren zur Primzahl p genau dann nur endlich viele p -Sylowgruppen, wenn alle p -Sylowgruppen zueinander konjugiert sind.

Entsprechend der Bedeutung, welche die klassenfiniten Gruppen in II erlangen, bringen wir in III eine genauere Untersuchung dieser Gruppen. Dabei erweist sich der in O eingeführte Kalkül abstrakter gruppentheoretischer Eigenschaften als besonders übersichtliche und auch bis zu einem gewissen Grad das Verständnis der Zusammenhänge vertiefende Schreibweise. So erhält man u.a. einen formal übersichtlichen und inhaltlich einfachen Beweis der Charakterisierung klassenfiniten Gruppen nach TSCHERNIKOW [19]. Diese lautet (III.27.) :

Eine Gruppe ist genau dann klassenfinit, wenn sie zentrale Erweiterung einer torsionsfreien abelschen Gruppe (die möglicherweise gleich 1 ist) mit einer lokal-normalen Gruppe ist.

Gleichzeitig gewinnen wir einen Überblick über verschiedene zu "klassenfinit" verwandte Eigenschaften, der in Form einer abschließenden, alle Ergebnisse von III beinhaltenden Tabelle gegeben wird.

Zur Darstellung von III sei bemerkt, daß auch bekannte Beweise wiedergegeben wurden, um die Geschlossenheit der Theorie zu demonstrieren (man vergleiche hiermit die Darstellung der Theorie der klassenfiniten Gruppen, wie sie in section 15.1 in [13] erscheint).

Meinem verehrten Lehrer Prof. W. Specht danke ich herzlich für die Anregungen und Ratschläge, mit denen er diese Arbeit unterstützt hat. In einer Vorlesung "Probleme der Gruppentheorie" entwickelte er verschiedene der hier verwendeten Ideen.

Notationen und Bezeichnungsweisen

Eine Reihe der hier benutzten Notationen sind üblich:

$A \subseteq B$ mengentheoretische Inklusion

$A \subset B$ strikte Inklusion

$a \in A$ a ist Element von A

$|A|$ Mächtigkeit von A

$\parallel$ Ende eines Beweises.

Gruppentheoretische Notationen:

$U \leq G$ U ist Untergruppe der Gruppe G

$N \trianglelefteq G$ N ist Normalteiler von G

$K \trianglelefteq G$ K ist charakteristische Untergruppe von G

$\langle S \rangle$ von $S \subseteq G$ erzeugte Untergruppe

$U \vee V = \langle U, V \rangle$ Kompositum zweier Untergruppen

$\mathcal{U}(G)$ Verband der Untergruppen von G

$|U : V|$ Index der Untergruppe V in U

$G \cong H$ isomorphe Gruppen

$N_G(S)$ Normalisator von $S \subseteq G$ in G

$C_G(S)$ Zentralisator von $S \subseteq G$ in G

$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ Kommutator

G' Kommutatorgruppe von G

$Z(G)$ Zentrum von G

$S^x = x^{-1}Sx$ Konjugation

$U^G = \langle U^x \mid x \in G \rangle$ normale Hülle von U in G

$U_G = \bigcap_{x \in G} U^x$ normaler Kern von U in G

$o(x)$ Ordnung eines Elementes x

$\Pi(G)$ Menge der Primteiler der Elementordnungen in G

$\text{Syl}_p(G)$ Menge der p -Sylowgruppen von G für $p \in \Pi(G)$

$n_p(G) := |\text{Syl}_p(G)|$

- $O(G)$ charakteristische Untergruppe der Elemente endlicher Ordnung, falls diese eine bilden
- $F(G)$ charakteristische Untergruppe der Elemente, die in G nur endlich viele Konjugierte haben (vgl. hierzu Baer [2] und Haimo [5])

In Formulierung und Beweis der Aussagen dieser Arbeit bedienen wir uns eines Kalküls abstrakter Gruppeneigenschaften, der hier kurz erläutert wird:

Definition Eine Klasse e von Gruppen ist eine Klasse im üblichen Sinn mit folgenden Eigenschaften:

$$(i) \quad G \in e, \quad G^* \cong G \quad \Rightarrow \quad G^* \in e.$$

(ii) e enthält eine Gruppe der Ordnung 1.

Sei $\mathcal{E}$ die Klasse aller Gruppenklassen.

Die Bildungen $e \leq e'$ ($e < e'$), $e \wedge e'$, $e \vee e'$ sind wie üblich zu verstehen. Der Verband $\mathcal{E}$ hat als

Einselement: g = Klasse aller Gruppen und als

Nullelement: i = Klasse aller 1-elementigen Gruppen.

Für alle $e \in \mathcal{E}$ gilt: $i \leq e \leq g$.

Wir identifizieren die Klassen e auch mit ihren charakteristischen Funktionen auf g :

$$G \in e \iff e(G) = 1 \quad \text{und} \quad G \notin e \iff e(G) = 0.$$

Folgende Redeweisen werden also synonym gebraucht:

$G \in e$, $e(G)=1$, G hat die Eigenschaft e , G ist e -Gruppe.

Definition Sind $e, e' \in \mathcal{E}$, so bezeichne $e \vee e'$ die Klasse aller Gruppen G , die Erweiterung einer e -Gruppe mit einer e' -Gruppe sind, d.h.

$$e \vee e'(G) = 1 \iff \begin{array}{c} \vee \\ \text{exakte Sequenz} \end{array} \quad 1 \xrightarrow{e} N \xrightarrow{e} G \xrightarrow{e'} G/N \rightarrow 1.$$

Offenbar gelten folgende Regeln:

$$\bigwedge_{e \in \mathfrak{E}} \bigwedge_{e' \in \mathfrak{E}} e' \leq ee' \quad \text{und} \quad e \leq ee'$$

$$\bigwedge_{e \in \mathfrak{E}} \bigwedge_{e' \in \mathfrak{E}} \bigwedge_{e'' \in \mathfrak{E}} e(e'e'') \leq (ee')e''.$$

Im allgemeinen ist die Verknüpfung weder assoziativ noch kommutativ (auch nicht potenz-assoziativ).

Definition Eine isotone Abbildung $w: \mathfrak{E} \longrightarrow \mathfrak{E}$ heiße Operator (auf Gruppeneigenschaften), d.h. es gilt

$$\bigwedge_{e, e' \in \mathfrak{E}} e \leq e' \implies we \leq we'.$$

Wir benutzen folgende Gruppeneigenschaften:

- a abelsch
- b endlich-erzeugbar
- f endlich
- k klassenfinit $\iff \bigwedge x \in G : |G:C(x)| < \infty$
- o ordnungsfinit $\iff \bigwedge x \in G : o(x) < \infty$
- t torsionsfrei $\iff \bigwedge 1 \neq x \in G : o(x) = \infty$.

Weiter sind folgende Operatoren wichtig:

- $\delta e(G)=1 \iff$ Jede Untergruppe von G ist e-Gruppe
- $\delta^* e(G)=1 \iff$ Jeder Normalteiler von G ist e-Gruppe
- $\chi e(G)=1 \iff$ Jedes epimorphe Bild von G ist e-Gruppe
- $\lambda e(G)=1 \iff$ Jeder endliche Komplex von G liegt in einer e-Untergruppe von G
- $\lambda^* e(G)=1 \iff$ Jeder endliche Komplex von G liegt in einem e-Normalteiler von G
- $\kappa e(G)=1 \iff e(G') = 1$
- $\zeta e(G)=1 \iff e(G/Z(G)) = 1$
- $\phi e(G)=1 \iff e(G/F(G)) = 1$.

Für alle $e \in \mathfrak{E}$ gilt: $\delta e \leq e, \chi e \leq e, e \leq \lambda e$.

Die Operatoren κ, ζ, ϕ geben Anlaß zur rekursiven Definition der Kommutatorreihe, der oberen Zentralreihe und der k-Zentralreihe:

$$\kappa^0 e = \zeta^0 e = \varpi^0 e = e.$$

$$\kappa^{n+1} e = \kappa(\kappa^n e), \quad \zeta^{n+1} e = \zeta(\zeta^n e), \quad \varpi^{n+1} e = \varpi(\varpi^n e).$$

Berücksichtigt man die Definitionen:

$$G^{(0)} = 1, \quad G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}] \quad \text{"Kommutatorreihe"}$$

$$Z_0(G) = 1, \quad Z_{n+1}(G) / Z_n(G) = Z(G/Z_n(G)) \quad \text{"obere Zentralreihe"}$$

$$F_0(G) = 1, \quad F_{n+1}(G) / F_n(G) = F(G/F_n(G)) \quad \text{"\mathfrak{K}-Zentralreihe",}$$

so heißt das in der Operatoren-Schreibweise:

$$\kappa^n e(G) = 1 \iff e(G^{(n)}) = 1.$$

$$\zeta^n e(G) = 1 \iff e(G/Z_n(G)) = 1.$$

$$\varpi^n e(G) = 1 \iff e(G/F_n(G)) = 1.$$

Schließlich definieren wir noch:

$$G \text{ heißt auflösbar (von Stufe } n), \text{ falls } \kappa^n \downarrow(G) = 1.$$

$$G \text{ heißt nilpotent (von Klassen), falls } \zeta^n \downarrow(G) = 1.$$

$$G \text{ heißt } \mathfrak{K}\text{-nilpotent (von Klassen } n), \text{ falls } \varpi^n \downarrow(G) = 1.$$

Fastnormale Untergruppen

Zur Einführung eines ersten Begriffes gehen wir von folgender trivialen Bemerkung aus: Für zwei Untergruppen U und V einer Gruppe G besteht die Beziehung $UV = U$ genau dann, wenn $U \leq V$ gilt.

Definition. Sind U, V Untergruppen von G , so heißt U fastenthalten in V , i.Z. $U \hookrightarrow V$, wenn gilt:

$$|U : UV| < \infty.$$

Es ergeben sich folgende Regeln:

- I.1. (1) $U \leq V \Rightarrow U \hookrightarrow V$.
 (2) $U \hookrightarrow V, V \hookrightarrow W \Rightarrow U \hookrightarrow W$.
 (3) $U \hookrightarrow V, U' \hookrightarrow V' \Rightarrow U \cup U' \hookrightarrow V \cup V'$.
 (4) $U \hookrightarrow V, N \trianglelefteq G \Rightarrow UN/N \hookrightarrow VN/N$.

Beweis:

- (1) $U \leq V \Rightarrow |U : UV| = |U : U| = 1$.
 (2) $|U : UNW| |UNW : UVNW| = |U : UV| |UNV : UVNW|$.
 Da $|UNW : UVNW| \leq |U : UV| < \infty$ und ebenso $|UNV : UVNW| \leq |V : VW| < \infty$, ist auch $|U : UNW| < \infty$.
 (3) $|U \cup U' : U \cup U' \cap V \cup V'| =$
 $|U \cup U' : U \cup U' \cap V| |U \cup U' \cap V : U \cup U' \cap V \cap V'| \leq |U : UV| |U' : U' \cap V'| < \infty$.
 (4) $|UN/N : UN/N \cap VN/N| \leq |UN/N : (UNV)/N| =$
 $= |UN : (UNV)N| \leq |U : UV| < \infty$. $\parallel$

Bemerkung. Aus I.1.(1) und (2) folgt, daß $\hookrightarrow$ eine reflexive und transitive Relation in der Menge der Untergruppen einer Gruppe ist. Durch Symmetrisierung erhalten wir eine Äquivalenzrelation.

Definition. Sind U, V Untergruppen von G , so heißen sie fastgleich, i.Z. $U \approx V$, falls $U \hookrightarrow V$ und $V \hookrightarrow U$ gilt.

I.2. (1) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

$$(2) \quad U \sim V, \quad U' \sim V' \implies U \cap U' \sim V \cap V'.$$

$$(3) \quad U \sim V, \quad N \trianglelefteq G \implies UN/N \sim VN/N. \quad ||$$

Bemerkung. I.2.(2) besagt, daß die Äquivalenzrelation $\sim$ $\cap$ -verträglich im Verband $\mathcal{U}(G)$ der Untergruppen von G ist. Jedoch ist $\sim$ keine Kongruenz in $\mathcal{U}(G)$, da $\sim$ nicht $\vee$ -verträglich ist. Es folgt nämlich z.B. aus $U \sim 1$ und $V \sim 1$ nicht notwendig $U \vee V \sim 1$, da das Kompositum zweier endlicher Untergruppen nicht endlich zu sein braucht (man nehme etwa das freie Produkt zweier endlicher Gruppen).

Mit Hilfe des Begriffes "fastgleich" können wir nun verschiedene Versionen einer abgeschwächten Normalität von Untergruppen in Gruppen einführen.

Definition. (a) $U \leq G$ heißt fastnormal in G , i.Z. $U \trianglelefteq^* G$, falls ein $N \trianglelefteq G$ existiert mit $U \sim N$.

(b) $U \leq G$ heißt oberfastnormal in G , i.Z. $U \trianglelefteq^* G$, falls $U \sim U^G$.

(c) $U \leq G$ heißt unterfastnormal in G , i.Z. $U \trianglelefteq_- G$, falls $U \sim U_G$.

(d) $U \leq G$ heißt bifastnormal in G , i.Z. $U \trianglelefteq^* G$, falls $U \trianglelefteq^* G$ und $U \trianglelefteq_- G$.

(e) $U \leq G$ heißt schwachnormal in G , i.Z. $U \trianglelefteq G$, falls $N(U) \sim G$.

Bemerkung. Einen gegenüber (e) verschärften Begriff von schwachnormal, der auch im Falle endlicher Gruppen nicht-trivial ist, verwendet MÜLLER in [8].

Im folgenden zeigen wir, daß die eben eingeführten Relationen in natürlicher Weise mit Untergruppen und epimorphen Bildern verträglich sind. Außerdem definieren alle bis auf (a) und (c) i.a. Teilverbände von $\mathcal{U}(G)$.

Bemerkung zur normalen Hülle. Ist $U < G$ und $G = S N(U)$ eine Nebenklassendarstellung mit wohlgeordneter Repräsentantenmenge S , so gilt $U^G = \prod_{s \in S} U^s$ (s. [18]).

I.3. Für jedes $\square \in \{ \triangleleft^{\delta}, \triangleleft^{\sim}, \triangleleft^{-}, \triangleleft^{\sim}, \triangleleft^{\exists} \}$ gilt:

$$(1) \quad U \square G, H \leq G \Rightarrow U \cap H \square H.$$

$$(2) \quad U \square G, N \triangleleft G \Rightarrow UN/N \square G/N.$$

$$(3) \quad U \square G, V \square G \Rightarrow U \cap V \square G.$$

Beweis:

$$(1) \quad \triangleleft^{\delta} : U \approx M, M \triangleleft G, H \leq G \Rightarrow U \cap H \approx M \cap H \triangleleft H.$$

$$\begin{aligned} \triangleleft^{\sim} : |(U \cap H)^H : U \cap H| &= | \prod_{x \in H} (U \cap H)^x : U \cap H | = \\ &= | \prod_{x \in H} U^x \cap H : U \cap H | \leq |U^G \cap H : U \cap H| < \infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleleft^{-} : |(U \cap H) : (U \cap H)_H| &= |U \cap H : \bigcap_{x \in H} (U \cap H)^x| = \\ &= |U \cap H : \bigcap_{x \in H} U^x \cap H| \leq |U \cap H : U_G \cap H| \leq |U : U_G| < \infty. \end{aligned}$$

$$\triangleleft^{\exists} : |H : N_H(U \cap H)| \leq |H : H \cap N_G(U)| \leq |G : N_G(U)| < \infty.$$

$$(2) \quad \triangleleft^{\delta} : U \approx M, M \triangleleft G, N \triangleleft G \Rightarrow UN/N \approx MN/N \triangleleft G/N.$$

$$\triangleleft^{\sim} : |(UN/N)^{G/N} : UN/N| = |U_G^G N/N : UN/N| \leq |U^G : U| < \infty.$$

$$\triangleleft^{-} : |UN/N : (UN/N)_{G/N}| \leq |UN/N : U_G N/N| \leq |U : U_G| < \infty.$$

$$\triangleleft^{\exists} : |G/N : N_{G/N}(UN/N)| \leq |G/N : N_G(U)N/N| \leq |G : N_G(U)| < \infty.$$

$$(3) \quad \triangleleft^{\delta} : U \approx M, V \approx N, M, N \triangleleft G \Rightarrow U \cap V \approx M \cap N \triangleleft G.$$

$$\begin{aligned} \triangleleft^{\sim} : |(U \cap V)^G : U \cap V| &= | \prod_{x \in G} (U \cap V)^x : U \cap V | = \\ &= | \prod_{x \in G} U^x \cap V^x : U \cap V | \leq |U^G \cap V^G : U \cap V| < \infty. \end{aligned}$$

$$\triangleleft^{-} : |U \cap V : (U \cap V)_G| = |U \cap V : U_G \cap V_G| < \infty.$$

$$\triangleleft^{\exists} : |G : N_G(U \cap V)| \leq |G : N_G(U) \cap N_G(V)| < \infty. \quad ||$$

Nun zur Vereinigung zweier verallgemeinert-normaler Untergruppen.

I.4. Für $\square \in \{ \triangleleft^-, \triangleleft^+, \triangleleft \}$ gilt:

$$U \square G, V \square G \implies U \vee V \square G.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \triangleleft^- : & |(U \vee V)^G : U \vee V| = |U^G V^G : U \vee V| = \\ & = |U^G V^G : U^G V| |U^G V : U \vee V| \leq |V^G : V| |U^G : U| < \infty. \\ \triangleleft^+ : & |(U \vee V)^G : (U \vee V)_G| = |U^G V^G : (U \vee V)_G| \leq |U^G V^G : U_G V_G| = \\ & = |U^G V^G : UV_G| |UV_G : UV_G| |UV_G : U_G V_G| \leq \\ & \leq |U^G : U| |V^G : V_G| |U : U_G| < \infty. \\ \triangleleft : & |G : N(U \vee V)| \leq |G : N(U) \cap N(V)| < \infty. \quad || \end{aligned}$$

Folgerung. Die oberfastnormalen, bifastnormalen und die schwachnormalen Untergruppen bilden Teilverbände von $\mathcal{Q}(G)$. Im Gegensatz zu $\mathcal{Q}(G)$ sind sie jedoch keine Vollverbände.

I.5. Für $\square \in \{ \triangleleft^\$, \triangleleft^- \}$ gilt:

$$U \square G, V \square G, UV = VU \implies U \vee V = UV \square G.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \triangleleft^\$: & U \approx M, V \approx N, M \triangleleft G, N \triangleleft G \implies \\ (i) & |UV : UV \cap MN| = |UVMN : MN| = |UVMN : UMN| |UMN : MN| \leq \\ & \leq |VN : N| |UM : M| < \infty. \\ (ii) & |MN : UV \cap MN| = |UVMN : UV| = |UVMN : MUV| |MUV : UV| \leq \\ & \leq |VN : V| |UM : U| < \infty. \end{aligned}$$

Aus (i) und (ii) folgt $UV \approx MN$, d.h. $UV \triangleleft^\$ G$.

$$\begin{aligned} \triangleleft^- : & |UV : (UV)_G| \leq |UV : U_G V_G| = \\ & = |UV : UV_G| |UV_G : U_G V_G| \leq |V : V_G| |U : U_G| < \infty. \quad || \end{aligned}$$

Definition. (s. [11], [17])

(a) $U \leq G$ heißt quasinormal in G , wenn U mit jeder Untergruppe von G vertauschbar ist.

(b) G heißt quasihamiltonsch, wenn jede Untergruppe von G quasinormal in G ist.

I.6. In einer quasihamiltonschen Gruppe G bilden die fastnormalen und die unterfastnormalen Untergruppen Teilverbände von $\Omega(G)$. ||

Eine weitere Aussage über den Ω -Halbverband der fastnormalen Untergruppen einer Gruppe stellt dar

I.7. Für eine Untergruppe $H \leq G$ besitze

$\mathfrak{F} := \{ U \leq H \mid U \trianglelefteq G \}$ ein maximales Element M .

Dann gilt: $M \trianglelefteq H$.

Beweis:

$M \in \mathfrak{F}$ heißt: $M \leq H$ und $\bigvee N \trianglelefteq G$ mit $M \approx N$. Wir zeigen, daß auch $MN \cap H = M(N \cap H)$ Element von $\mathfrak{F}$ ist. Aus

$$|(MN \cap H)N : N| = |MN : N| < \infty \quad \text{und}$$

$$|(MN \cap H) : MN \cap H| = |MN : MN \cap H| \leq |MN : M| < \infty \quad \text{folgt:}$$

$MN \cap H \approx N \leq G$. Wegen der Maximalität von M in $\mathfrak{F}$ gilt

$M = MN \cap H$, d.h. $N \cap H \leq M$. Daraus folgt $M \cap N = H \cap N \trianglelefteq H$.

Also ist M unterfastnormal in H . ||

Wir wenden uns nun der Frage zu, welche Zusammenhänge zwischen den eingeführten Verallgemeinerungen des Normalitätsbegriffes bestehen. Dabei benutzen wir ein Ergebnis, das wegen seiner Schlüsselstellung in der Theorie der klassenfiniten Gruppen hier explizit formuliert sei:

I.8. (Lemma von DIETZMANN, s. [14] p.47).

Ein endlicher normaler Komplex $\mathfrak{K}$ von Elementen endlicher Ordnung einer Gruppe G erzeugt einen endlichen Normalteiler $\langle \mathfrak{K} \rangle \trianglelefteq G$.

Triviale Folgerungen aus I.8. sind

I.9. $\mathfrak{f} = \mathfrak{b} \wedge 0 \wedge \mathfrak{K}$. ||

I.10. $\lambda^* \mathfrak{f} = 0 \wedge \mathfrak{K}$. ||

(Vgl. hierzu auch [2] p.1025, Theorem 1.)

I.11. Von den Aussagen "oberfastnormal", "unterfastnormal" und "schwachnormal" implizieren je zwei die dritte:

- (1) $U \trianglelefteq G \Rightarrow U \trianglelefteq G$
 (2) $U \trianglelefteq G, U \trianglelefteq G \Rightarrow U \trianglelefteq G$.
 (3) $U \trianglelefteq G, U \trianglelefteq G \Rightarrow U \trianglelefteq G$.

Beweis:

- (1) $U/U_G \leq U^G/U_G \trianglelefteq G/U_G$, d.h. U/U_G liegt in einem endlichen Normalteiler von G/U_G . Demzufolge gilt:
 $U/U_G \trianglelefteq G/U_G$. Da aber $\bigwedge x \in G: U_G \leq U^x$, haben wir
 $|G:N_G(U)| = |G/U_G : N_{G/U_G}(U/U_G)| < \infty$. Also $U \trianglelefteq G$.
- (2) Es gilt $\bigwedge x \in G: |U^x:U_G| = |U:U_G| < \infty$. Wegen $U \trianglelefteq G$ seien etwa $U=U_1, U_2, \dots, U_n$ die verschiedenen Konjugierten von U in G . Der endliche normale Komplex $\mathfrak{K} := \{U/U_G, U_2/U_G, \dots, U_n/U_G\}$, bestehend aus Elementen endlicher Ordnung, liegt nach I.8. in einem endlichen Normalteiler von G/U_G :
 $U/U_G \leq N/U_G \trianglelefteq G/U_G$, so daß $N \trianglelefteq G$ und $|N:U_G| < \infty$.
 Also ist U oberfastnormal in G .
- (3) $\bigwedge x \in G: |U:U \cap U^x| = |UU^x:U^x| \leq |U^G:U^x| = |U^G:U| < \infty$.
 $\Rightarrow$ Ist $G = S N(U)$ mit $|S| < \infty$ Nebenklassendarst.,
 so gilt: $|U:U_G| = |U: \bigcap_{s \in S} (U \cap U^s)| \leq \prod_{s \in S} |U:U \cap U^s| < \infty$.
 Demnach ist U unterfastnormal in G . ||

Betrachtet man fastnormale Untergruppen mit zusätzlichen abstrakten gruppentheoretischen Eigenschaften, so stellt man weitergehende Zwischenbeziehungen fest.

Bemerkung. BAER nennt in [3], p.3 eine Gruppe eine fast- e -Gruppe ($e \in \mathfrak{E}$), wenn G eine e -Untergruppe von endlichem Index enthält. Ist $e \in \mathfrak{E}$ untergruppenvererblich:

$\delta e = e$, so ist offenbar jede Untergruppe einer Gruppe, die einer e -Untergruppe fastgleich ist, eine fast- e -Gruppe.

I.12. Sei U eine endlich-erzeugbare Untergruppe von G .

Dann gelten folgende Äquivalenzen:

- (1) $U \trianglelefteq G \iff U \trianglelefteq_{\sim} G$.
 (2) $U \trianglelefteq^{\sim} G \iff U \trianglelefteq G, U \trianglelefteq G$.

Beweis:

(1) " $\Leftarrow$ " trivial.

" $\Rightarrow$ " Sei $U \cong M$, wo $M \trianglelefteq G$. Dann folgt:

$$b(U) = 1, |U:U \cap M| < \infty \implies b(U \cap M) = 1.$$

$$b(U \cap M) = 1, |M:U \cap M| < \infty \implies b(M) = 1.$$

Nach einem Satz von M. HALL jr.[6] besitzt eine endlich-erzeugbare Gruppe zu vorgegebenem $n \in \mathbb{N}$ nur endlich viele Untergruppen von diesem Index. Der Durchschnitt dieser ist eine charakteristische Untergruppe von endlichem Index. In unserem Fall existiert demnach ein $K : K \trianglelefteq M, K \leq U \cap M, |M:K| < \infty$. Wegen $K \trianglelefteq M \trianglelefteq G$ ist K Normalteiler von G , und es gilt:
 $|U:K| = |U:U \cap M| |U \cap M:K| \leq |U:U \cap M| |M:K| < \infty$. Also ist U unterfastnormal in G .

(2) " $\Leftarrow$ " gilt stets nach I.11.(2).

" $\Rightarrow$ " mit I.12.(1) und I.11.(1). ||

Bemerkung. Wir werden in II₁ sehen, daß für die p -Sylowuntergruppen einer Gruppe noch stärkere Zusammenhänge als in I.12. bestehen. Jedoch ist auch dort der unterfastnormale Fall der schwächste.

I.13. Ist A eine abelsche fastnormale Untergruppe von G , so existiert ein abelscher Normalteiler $B \trianglelefteq G$ mit $A \cong B$.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $A \cong N$ für ein $N \trianglelefteq G$.

Demnach ist $|N:A \cap N| < \infty$ und somit auch nach Poincaré

$|N:(A \cap N)_N| < \infty$, wobei nun $(A \cap N)_N$ abelscher Normalteiler

in N ist. Sei P das Produkt aller abelschen Normalteiler

von endlichem Index in N . Dann ist $P \trianglelefteq N$ und

$|N:P| \leq |N:(A \cap N)_N| < \infty$. Folglich ist P bereits Produkt

endlich vieler unter diesen abelschen Normalteilern,

etwa $P = \prod_{i=1}^n A_i$, $A_i \trianglelefteq N$, $|N:A_i| < \infty$. Nun ist

$|N: \prod_{i=1}^n A_i| < \infty$ und $\prod_{i=1}^n A_i \leq Z(P)$, da alle A_i abelsch

sind. Es ist $Z(P) \trianglelefteq P \trianglelefteq N \trianglelefteq G$, also $Z(P) \trianglelefteq G$. Weiter

ist $A \cong N \cong Z(P)$, also $A \cong Z(P)$. $Z(P)$ ist der gesuchte

Normalteiler B von G . ||

I.14. Ist N nilpotente fastnormale Untergruppe von G ,
so existiert ein nilpotenter Normalteiler $K \trianglelefteq G$ mit $N \cong K$.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert ein $M \trianglelefteq G$ mit

$N \cong M$. Dann ist $N \cap M$ nilpotent und $(N \cap M)_M$ nilpotenter Normalteiler von endlichem Index in M .

Sei K das Produkt aller nilpotenten Normalteiler

von endlichem Index in M . Dann ist $K \trianglelefteq M$ und

nilpotent (vgl. [13] 7.4.1.). Offenbar ist $N \cong K$,

und wegen $K \trianglelefteq M \trianglelefteq G$ ist $K \trianglelefteq G$. ||

I.15. Ist N auflösbare fastnormale Untergruppe von G ,
so existiert ein auflösbarer Normalteiler $K \trianglelefteq G$ mit $N \cong K$.

Beweis: Er verläuft analog zu dem von I.14., wobei

entsprechend zu beachten ist, daß das Produkt

auflösbarer Normalteiler auflösbar ist. ||

Soweit einiges zu "fastnormal" unter Berücksichtigung weiterer Eigenschaften.

Einer diesen Untersuchungen entsprechenden Verallgemeinerung ist auch der Isomorphiebegriff fähig:

Definition. Zwei Gruppen G, H heißen fastisomorph, falls eine Gruppe K mit Untergruppen $G^* \leq K$, $H^* \leq K$ derart existiert, daß gilt:

$$G \cong G^*, \quad H \cong H^*, \quad G^* \cong H^*.$$

Das folgende Resultat sagt insbesondere, daß obige Definition unabhängig von der Gruppe K ist.

I.16. Zwei Gruppen G, H sind genau dann fastisomorph, wenn Untergruppen $U \leq G$ und $V \leq H$ existieren mit $|G : U| < \infty$, $|H : V| < \infty$, $U \cong V$.

Beweis:

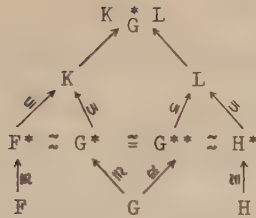
" $\Rightarrow$ " Es seien G, H fastisomorph. Dann haben wir $|G^* : G^* \cap H^*| < \infty$ und $|H^* : G^* \cap H^*| < \infty$. Sind $\gamma : G^* \rightarrow G$ und $\chi : H^* \rightarrow H$ Isomorphismen, so definieren wir $U := \gamma(G^* \cap H^*)$ und $V := \chi(G^* \cap H^*)$. Offenbar gilt $|G : U| < \infty$, $|H : V| < \infty$, $U \cong V$.

" $\Leftarrow$ " Sei A ein Repräsentant der Isomorphieklasse von U und V , d.h. $A \cong U$ und $A \cong V$. Sei $G \underset{A}{*} H$ das freie Produkt von G und H mit amalgamierter Untergruppe A (vgl. [13] 8.1.8.). Dann existieren Untergruppen $G^* \leq G \underset{A}{*} H$ und $H^* \leq G \underset{A}{*} H$ mit $G \cong G^*$, $H \cong H^*$ und $G^* \cap H^* = A$, also $G^* \cong H^*$. ||

I.17. Die Fastisomorphie ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis:

Fastisomorph ist reflexiv und symmetrisch definiert. Zum Nachweis der Transitivität sei F fastisomorph zu G und G fastisomorph zu H . An die Stelle eines ausführlichen Beweises trete folgendes Diagramm:



Nun sieht man, daß F und H fastisomorph sind; denn in $K \overset{*}{G} L$ existieren zu F bzw. H isomorphe Untergruppen, die fastgleich sind, wie man aus dem 1. Stock des Diagrammes ersieht. ||

Bemerkung. Für zentral-fastisomorphe Gruppen, d.h. Gruppen, wo die in I.16. betrachteten Untergruppen im Zentrum liegen, vereinfacht sich die Konstruktion der Einbettungsgruppe, indem das freie Produkt mit amalgamierter Untergruppe durch das direkte Produkt mit amalgamierter Untergruppe ersetzt wird. Es handelt sich hierbei dann um ζf -Gruppen (vgl. III).

Schließlich führen wir einen weiteren "Fastbegriff" ein, auf den wir einmal in III zurückkommen werden.

Definition. Für eine Untergruppe $U \leq G$ bezeichne

$$\mathcal{F}(U) := \{ x \in G \mid U \cong U^x \}$$

den Fastnormalisator von U in G .

I.18. Ist U Untergruppe von G , so auch $\mathcal{F}(U)$.

Beweis:

(i) Sei $x \in \mathcal{F}(U)$. Dann ist auch $x^{-1} \in \mathcal{F}(U)$:

$$\begin{aligned} |U : U \cap U^{x^{-1}}| &= |U^{xx^{-1}} : U^{xx^{-1}} \cap U^{x^{-1}}| = \\ &= |U^{xx^{-1}} : (U^x \cap U)^{x^{-1}}| = |U^x : U^x \cap U| < \infty. \end{aligned}$$

Ebenso zeigt man: $|U^{x^{-1}} : U \cap U^{x^{-1}}| < \infty$. Also: $x^{-1} \in \mathcal{F}(U)$.

(ii) Sind $x, y \in \mathcal{F}(U)$, so auch xy :

$$\begin{aligned} |U:U \cap U^{xy}| &= |U^{y^{-1}}y:U^{y^{-1}}y \cap U^{xy}| = |U^{y^{-1}}y:(U^{y^{-1}} \cap U^x)y| = \\ &= |U^{y^{-1}}:U^{y^{-1}} \cap U^x|. \end{aligned}$$

Ebenso zeigt man: $|U^{xy}:U \cap U^{xy}| = |U^x:U^{y^{-1}} \cap U^x|$.

Wegen $U \approx U^y$ folgt nach (i) auch $U \approx U^{y^{-1}}$. Weiter ist

$U \approx U^x$, so daß $U^x \approx U^{y^{-1}}$, d.h. die obigen Indizes sind beide endlich. Also ist gezeigt, daß $U \approx U^{xy}$. ||

II

Fastnormale p-Sylowgruppen

Ausgangspunkt für die folgenden Untersuchungen ist der Satz von SYLOW (vgl.[14]):

II.1. Ist $S \in \text{Syl}_p(G)$ schwachnormal in G , so sind alle p-Sylowgruppen von G konjugiert, und es gilt:

$$|G : N(S)| \equiv 1 \pmod{p}.$$

$n_p(G)$ ist also genau dann endlich, wenn eine (und damit jede) p-Sylowgruppe schwachnormal ist. ||

Es ist naheliegend, auch die verschiedenen in I eingeführten Fastnormalitätsbegriffe bei p-Sylowgruppen zu testen. Vorangestellt seien zwei einfach zu beweisende Folgerungen aus II.1. (s.[13] 6.1.15. und 6.2.4.).

II.2. Ist $H \in \text{Syl}_p(G)$ schwachnormal in G und $A \trianglelefteq G$, so ist $A \cap H \in \text{Syl}_p(A)$.

II.3. Ist $H \trianglelefteq G$ und $P \in \text{Syl}_p(H)$ und $P \trianglelefteq H$, so gilt:
 $G = HN(P)$.

Der folgende Satz zeigt, daß für p-Sylowgruppen die Aussagen (1) und (2) in I.11. umkehrbar sind:

II.4. Ist $S \in \text{Syl}_p(G)$, so gilt:

$$(1) \quad S \trianglelefteq^{\sim} G \iff S \trianglelefteq G.$$

$$(2) \quad S \trianglelefteq G, S \trianglelefteq^{\sim} G \iff S \trianglelefteq^{\sim} G.$$

Beweis:

(1) " $\Rightarrow$ " gilt nach I.11. (1).

" $\Leftarrow$ " Sei $S \trianglelefteq G$ und $M \approx N(S)_G$, so daß $|G:M| < \infty$ ist.

Wegen $M \leq N(S)$ ist $M \leq N(MNS)$, also $MNS \trianglelefteq M$.

Nach II.2. ist $MNS \in \text{Syl}_p(M)$. Wegen $MNS \trianglelefteq M$ ist MNS einzige p-Sylowgruppe von M , d.h.

$MNS \trianglelefteq M \trianglelefteq G$, also $MNS \trianglelefteq G$. Überdies ist
 $|S:SNM| \leq |G:M| < \infty$, sodaß S unterfastnormal
 in G ist. Nach I.11.(2) folgt $S \trianglelefteq G$.

(2) " $\Rightarrow$ " gilt nach I.11.(2).

" $\Leftarrow$ " Sei $S \trianglelefteq G$, d.h. $|S^G:S| < \infty$, also nach II.1.:
 $n_p(S^G) < \infty$. Nach II.2. folgt hieraus:
 $G = S^G N(S)$. Für S_G heißt das: $S_G = S_{S_G}$.
 Also: $|S:S_G| \leq |S^G:S_{S_G}| < \infty$. Demnach haben
 wir insgesamt $S \trianglelefteq G$. Nach I.11.(1) folgt die
 Behauptung: $S \trianglelefteq G$.

II.5. Für eine p -Sylowgruppe S von G sind äquivalent:

(1) $S \trianglelefteq G$.

(2) $S \trianglelefteq G$.

Beweis: (2) $\Rightarrow$ (1) ist trivial.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sei $S \trianglelefteq G$, d.h. es existiert ein $M \trianglelefteq G$ mit
 $S \cong M$. Da $S \in \text{Syl}_p(G)$, ist auch $S \in \text{Syl}_p(SM)$.
 Wegen $|SM:S| < \infty$ ist $n_p(SM) < \infty$. Da $M \trianglelefteq SM$, ist
 nach II.2. $SNM \in \text{Syl}_p(M)$. Schließlich folgt
 aus $|M:SNM| < \infty$ auch $n_p(M) < \infty$, so daß nach
 II.3. gilt: $G = MN(SNM)$. Wie im Beweis zu
 II.4.(2) ist demnach $(SNM)_G = (SNM)_M$. Aus
 $|M:SNM| < \infty$ folgt $|M:(SNM)_M| < \infty$ und weiter
 $|S:S_G| \leq |S:(SNM)_M| = |S:SNM| |SNM:(SNM)_M| < \infty$.
 Also ist gezeigt: $S \trianglelefteq G$. ||

Nach dem bisher Bewiesenen bleibt der Fall der unter-
 fastnormalen p -Sylowgruppen zu untersuchen. Insbesondere
 stellt sich die Frage, ob auch für I.11.(3) im Falle der
 p -Sylowgruppen die Umkehrung beweisbar ist.

Dem ist leider nicht so.

Generell stellt ja "unterfastnormal" die schwächste der von uns untersuchten Abschwächungen dar, was allein die Tatsache belegt, daß jede endliche Untergruppe unterfastnormal ist.

II.4. sagt insbesondere aus, daß für p -Sylowgruppen oberfastnormal und schwachnormal das gleiche bedeuten. Tatsächlich ist unterfastnormal nun nicht mehr äquivalent. Das zeigt folgendes Beispiel, auf das H.Ströbner [16] im Zusammenhang mit dem Isomorphieproblem für p -Sylowgruppen hingewiesen hat.

Sei $G := Z_{3^\infty} \rtimes Z_2$, d.h. G ist semidirektes Produkt der 3-Prüfergruppe mit der Gruppe der Ordnung 2:
 $G = \langle Z_{3^\infty}, x \mid x^2=1, z^x = z^{-1} \rangle$. Dann ist jede zyklische Untergruppe $\langle xz \rangle$ ($z \in Z_{3^\infty}$) eine 2-Sylowgruppe mit $(xz)^2 = 1$, also endlich und somit, wie oben bemerkt, unterfastnormal in G . Jedoch sind alle diese 2-Sylowgruppen konjugiert, d.h. $\langle xz \rangle$ hat unendlich viele konjugierte Untergruppen in G : $\langle xz \rangle$ ist nicht schwachnormal in G .

Hinreichende Bedingungen dafür, daß eine p -Sylowgruppe in einem abgeschwächten Sinn normal in G ist, liefert der Normalisator der p -Sylowgruppe.

Dabei gehen wir von folgender trivialen Bemerkung aus:

Bemerkung. Ist S p -Sylowgruppe von G und $N(S) \trianglelefteq G$,
 so ist auch $S \trianglelefteq G$.

Man kann nun fragen, ob aus der abgeschwächten Normalität von $N(S)$ die entsprechende von S folgt. Dies ist in der Tat für alle in Frage kommenden Begriffe richtig.

II.6. Sei $S \in \text{Syl}_p(G)$. Dann gilt

$$N(S) \trianglelefteq G \implies S \trianglelefteq G.$$

Beweis: Nach Voraussetzung existiert ein $M \trianglelefteq G$ mit

$$M \cong N(S). \text{ Da } S \in \text{Syl}_p(G) \text{ ist } S \in \text{Syl}_p(N(S)M).$$

Weiter ist $N_{N(S)M}(S) = N(S) \cap N(S)M = N(S)$, so daß wegen $|N(S)M : N(S)| < \infty$ auch $n_p(N(S)M) < \infty$ ist. Nun

gilt $M \trianglelefteq N(S)M$, so daß nach II.2. $S \cap M \in \text{Syl}_p(M)$.

Außerdem wissen wir $n_p(M) \leq n_p(N(S)M)$, womit nach

II.3. folgt: $G = M N(S \cap M)$, also $(S \cap M)_G = (S \cap M)_M$.

Da $n_p(M) < \infty$, ist $|M : N_M(S \cap M)| < \infty$, so daß nach

II.4.(1) folgt $S \cap M \trianglelefteq M$, d.h. insbesondere

$$|S \cap M : (S \cap M)_M| < \infty. \text{ Da, wie eben gezeigt, } (S \cap M)_M$$

normal in G ist, haben wir schließlich:

$$\begin{aligned} |S : (S \cap M)_M| &= |S : S \cap M| |S \cap M : (S \cap M)_M| \leq \\ &\leq |N(S) : N(S) \cap M| |S \cap M : (S \cap M)_M| < \infty. \end{aligned}$$

Also ist sogar bewiesen: $S \trianglelefteq G$. ||

Setzt man gleich Unterfatnormalitt von $N(S)$ voraus, so kommt man schneller zum Ziel, d.h. wir formulieren noch explizit:

II.7. Sei $S \in \text{Syl}_p(G)$. Dann gilt

$$N(S) \trianglelefteq G \implies S \trianglelefteq G.$$

Beweis: Es gibt nach Voraussetzung ein $M \trianglelefteq G$, $M \leq N(S)$

mit $|N(S) : M| < \infty$. Als p -Gruppe von M liegt $S \cap M$

in einer p -Sylowgruppe $T \in \text{Syl}_p(M)$:

$S \cap M \leq T \leq M \leq N(S)$. Da S einzige p -Sylowgruppe von

$N(S)$ ist, muß gelten $T \leq S$, also $S \cap M \leq T \leq S \cap M$,

d.h. $T = S \cap M$, also $S \cap M \in \text{Syl}_p(M)$. Außerdem folgt

aus $M \leq N(S)$, daß $S \cap M \trianglelefteq M \trianglelefteq G$, also $S \cap M \trianglelefteq G$.

Da weiter $|S : S \cap M| \leq |N(S) : M| < \infty$ gilt, ist die Behauptung $S \trianglelefteq G$ bewiesen. ||

Schließlich erhalten wir noch für die verbleibenden Begriffsbildungen folgenden zusammenfassenden Satz:

II.8. Sei $S \in \text{Syl}_p(G)$. Dann gelten folgende Äquivalenzen:
 $N(S) \trianglelefteq^* G \iff S \trianglelefteq^* G \iff S \trianglelefteq G \iff N(S) \trianglelefteq G$.

Beweis:

1. $S \trianglelefteq G \iff S \trianglelefteq^* G$ besagt gerade II.4..
2. $S \trianglelefteq G \iff N(S) \trianglelefteq G$ ist trivial wegen $N(N(S)) = N(S)$.
3. $S \trianglelefteq^* G \implies S \trianglelefteq G \implies N(S) \trianglelefteq^* G$; denn eine Untergruppe von endlichem Index ist oberfastnormal.
4. Es bleibt noch zu zeigen: $N(S) \trianglelefteq^* G \implies S \trianglelefteq^* G$.

Sei also $M \trianglelefteq G$ mit $|M : N(S)| < \infty$ gegeben. Wegen $N_M(S) = N(S) \cap M = N(S)$ und $S \in \text{Syl}_p(M)$ ist $n_p(M) < \infty$. Also liefert II.3. $G = MN(S) = M$. Das bedeutet $|G : N(S)| < \infty$, also $S \trianglelefteq G$ und somit auch $S \trianglelefteq^* G$. ||

Betrachten wir nun speziell die Klasse der klassenfiniten Gruppen, so stellt sich heraus, daß alle Abschwächungen der Normalität für p -Sylowgruppen hier zusammenfallen.

Entscheidend ist dabei

II.9. Sei $\hat{k}(G) = 1$. Für eine Untergruppe $U \leq G$ sind gleichwertige Bedingungen:

- (1) $U \trianglelefteq^* G$
- (2) $U \trianglelefteq^{\S} G$.

Beweis: (1) $\implies$ (2) ist trivial.

(2) $\implies$ (1) : Nach Voraussetzung existiert $N \trianglelefteq G$ mit $U \leq N$. UN/N ist eine endliche Untergruppe von G/N . Wegen $\chi \hat{k} = \hat{k}$ (III.1.) liefert das Lemma von Dietzmann (I.8.) die Existenz eines endlichen Nor-

malteilers M/N mit $UN/N \leq M/N \trianglelefteq G/N$, d.h. $M \trianglelefteq G$.

Also gilt $|M:UN| < \infty$, und insgesamt ist

$|M:U| = |M:UN||UN:U| < \infty$, d.h. U ist oberfast-normal in G . $\parallel$

Wir können somit Aussage (3) in I.11. umkehren:

II.10. Sei $k(G)=1$. Für eine Untergruppe $U \leq G$ gilt:

$$U \trianglelefteq G \iff U \trianglelefteq^* G \text{ und } U \trianglelefteq G.$$

Beweis: " $\Leftarrow$ " I.11.(3).

" $\Rightarrow$ " II.9. und I.11.(1). $\parallel$

Es zeigt sich, daß auch Aussage (1) in I.11. umkehrbar für klassenfinite Gruppen ist. Das Hilfsmittel ist:

II.11. In einer klassenfiniten Gruppe sind konjugierte Untergruppen fastgleich.

Beweis: Es seien U, V in G konjugierte Untergruppen, etwa $U = V^x$ ($x \in G$). Man bestätigt folgende Inklusionen:

$$C(x) \cap V \leq V^x \cap V = U \cap V \quad \text{und}$$

$$C(x) \cap U \leq U \cap U^{x^{-1}} = U \cap V.$$

Da $k(G)=1$, ist $|G:C(x)| < \infty$, woraus folgt:

$$|U:U \cap V| \leq |U:U \cap C(x)| \leq |G:C(x)|, \text{ und ebenso}$$

$$|V:U \cap V| \leq |V:V \cap C(x)| \leq |G:C(x)|. \text{ Also sind}$$

U und V fastgleiche Untergruppen von G . $\parallel$

Als Erinnerung an den Fastnormalisator sei als Folgerung aus II.11. erwähnt:

II.12. In einer klassenfiniten Gruppe gilt für jede Untergruppe $U \leq G$: $\mathcal{F}(U) = G$.

II.13. Sei $k(G) = 1$. Für eine Untergruppe $U \leq G$ gilt:

$$U \trianglelefteq G \iff U \trianglelefteq^* G.$$

Beweis: " $\Leftarrow$ " I.11.(1).

" $\Rightarrow$ " $U \trianglelefteq G$ bedeutet, daß U nur endlich viele konjugierte in G hat, etwa $U_1=U, U_2, \dots, U_n$. Diese sind nach II.11. alle fastgleich. Nach I.2.(2) ist dann $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$, d.h. $|U : U_G| < \infty$. Nach I.11.(2) ist dann auch $U \trianglelefteq G$, d.h. insgesamt $U \trianglelefteq G$. $\parallel$

Nun zu den p -Sylowgruppen einer klassenfiniten Gruppe.

II.14. Sei $\hat{K}(G)=1$. Dann gilt für $S \in \text{Syl}_p(G)$:

$$(i) \quad S \trianglelefteq G \iff S \trianglelefteq G \iff S \trianglelefteq G \iff S \trianglelefteq G.$$

$$(ii) \quad N(S) \trianglelefteq G \iff N(S) \trianglelefteq G \iff N(S) \trianglelefteq G \iff N(S) \trianglelefteq G.$$

Außerdem ist jede Bedingung in (ii) mit jeder Bedingung in (i) äquivalent.

Beweis: Man wende auf die bisher bewiesenen Beziehungen II.9. an. Dadurch wird ja gerade die Sackgasse der Unterfastnormalität für den Fall der klassenfiniten Gruppen behoben. $\parallel$

II.14. besagt im wesentlichen, daß die Bedingung $v_p(G) = 1$: " G hat zu $p \in \Pi(G)$ nur endlich viele p -Sylow-
untergruppen"

für $\hat{K}$ -Gruppen zu allen bisher gestellten Anforderungen an p -Sylowgruppen äquivalent ist. Interessant ist nun zu wissen, daß für klassenfiniten Gruppen $v_p(G) = 1$ außerdem noch äquivalent ist zur Forderung:

"Alle p -Sylowgruppen sind konjugiert".

Ein entsprechender Satz ist für $\mathcal{K}^*f$ -Gruppen bekannt:

II.15. (KARGAPOLOW, [8]). In einer $\mathcal{K}^*f$ -Gruppe G existieren zu $p \in \Pi(G)$ nur endlich viele p -Sylowgruppen
 $\iff$ alle p -Sylowgruppen sind in G konjugiert.

Es ist also unser Ziel, diesen Satz für $\hat{K}$ -Gruppen zu beweisen, d.h. die Ordnungsfiniheit von G als entbehrliche Prämisse nachzuweisen.

Zunächst brauchen wir folgenden Hilfssatz:

II.16. Sei $\lambda^* f(G) = 1$, und seien $S, T \in \text{Syl}_p(G)$. Dann gilt:

$$S \hookrightarrow T \iff S \text{ und } T \text{ sind konjugiert.}$$

Beweis: " $\Leftarrow$ " Wegen $\lambda^* f < \hat{K}$ folgt dies nach II.11..

" $\Rightarrow$ " Sei $|S : S \cap T| < \infty$ und etwa

$$S = \sum_{i=1}^n x_i (S \cap T) \text{ eine Nebenklassendarstellung.}$$

Sei N der von den x_i erzeugte endliche Normalteiler von G , das bedeutet $S \leq N(S \cap T)$. Nun weiß man, daß epimorphe Bilder von Sylowgruppen in $\lambda^* f$ -Gruppen wieder Sylowgruppen sind (siehe z.B. [4], vgl. dazu auch [16]). Also folgt:

$NS/N = N(S \cap T)/N \in \text{Syl}_p(G/N)$. Andererseits ist auch $NT/N \in \text{Syl}_p(G/N)$, wobei

$$NT/N \geq N(S \cap T)/N = NS/N, \text{ so daß gilt}$$

$NT/N = N(S \cap T)/N$, d.h. auch $T \leq N(S \cap T)$. Als Sylowgruppen von endlichem Index in $N(S \cap T)$ sind nun S und T nach II.1. konjugiert. $\parallel$

II.17. Sei $\hat{K}(G) = 1$, und seien $S, T \in \text{Syl}_p(G)$. Dann gilt:

$$S \hookrightarrow T \iff S \text{ und } T \text{ sind in } \mathcal{O}(G) \text{ konjugiert.}$$

Beweis: " $\Leftarrow$ " ist wieder nach II.11. klar.

" $\Rightarrow$ " Nach III.12. gilt $\hat{K} < \mathcal{O}\hat{K}$, d.h. die Elemente endlicher Ordnung bilden eine Untergruppe $\mathcal{O}(G)$, welche gemäß $\lambda^* f = \mathcal{O} \wedge \hat{K}$ eine $\lambda^* f$ -Gruppe ist.

Nun sind S und T als p -Gruppen in $\mathcal{O}(G)$ enthalten und demnach nach II.16. in $\mathcal{O}(G)$ konjugiert. $\parallel$

Nun die Verallgemeinerung des Satzes von KARGAPOLOW:

II.18. In einer $\hat{K}$ -Gruppe G existieren zur Primzahl $p \in \Pi(G)$ nur endlich viele p -Sylowgruppen $\iff$ Alle p -Sylowgruppen in G sind zueinander konjugiert.

Beweis: " $\Rightarrow$ " klar nach II.1..

" $\Leftarrow$ " Wenn alle p -Sylowgruppen in G konjugiert sind, so sind sie nach II.11. fastgleich. Nach II.17. sind sie wiederum alle in $O(G)$ konjugiert. Nach dem Satz von KARGAPOLOW II.18. sind es dann nur endlich viele, da $O(G)$ eine κf -Gruppe ist. ||

Man kann fragen, wann für alle $p \in \Pi(G)$ die Bedingung v_p erfüllt ist. Zu diesen Gruppen gehören die Gruppen mit endlicher Kommutatorgruppe, wie der folgende Satz zeigt:

II.19. In einer κf -Gruppe gibt es zu jeder Primzahl $p \in \Pi(G)$ nur endlich viele p -Sylowgruppen.

Beweis: Man stellt zunächst fest, daß in einer κf -Gruppe jede Untergruppe oberfastnormal ist (diese Eigenschaft ist nach B.H.NEUMANN III.41.(ii) sogar kennzeichnend für κf -Gruppen) :

$$|U^G : U| = |\langle U, [U, G] \rangle : U| \leq |[U, G]| \leq |G'| < \infty.$$

Also sind insbesondere alle p -Sylowgruppen oberfastnormal, d.h. nach II.4. auch schwachnormal.

Mit II.1. ist die Behauptung nun bewiesen.

Abschließend beweisen wir noch eine ganz anders geartete Aussage über fastnormale p -Sylowgruppen.

II.20. Sind in G zur Primzahl $p \in \Pi(G)$ alle p -Sylowgruppen vertauschbar, und ist $S \in \text{Syl}_p(G)$ fastnormal, so ist S einzige p -Sylowgruppe von G .

Beweis: Eine fastnormale p -Sylowgruppe ist nach II.5. unterfastnormal: $|S : S_G| < \infty$. Da S_G p -Normalteiler von G ist, haben wir mit

$$D := \bigcap_{T \in \text{Syl}_p(G)} T = \langle P \mid P \leq G, P \text{ p-Gruppe} \rangle$$

$$S_G \leq D \leq S, \text{ also } |S:D| \leq |S:S_G| < \infty.$$

Ist T eine weitere p -Sylowgruppe von G , so gilt $|S:SN T| \leq |S:D| < \infty$. Wegen $|S:SN T| = |ST:T|$, und weil nach Voraussetzung ST eine Untergruppe von G ist, ist $T \in \text{Syl}_p(ST)$ p -Sylowgruppe von endlichem Index in ST . Da S ebenfalls p -Sylowgruppe von ST ist, sind S und T nach II.1. in ihrem Produkt ST konjugiert. Nun ist aber klar, daß zwei Untergruppen einer Gruppe gleich sein müssen, wenn sie in ihrem Produkt konjugiert sind. Demnach gibt es nur eine einzige p -Sylowgruppe in G . //

Es bleibt zu überlegen, was es für eine Gruppe bedeutet, daß zu einer Primzahl p alle p -Sylowgruppen vertauschbar sind.

III

Klassenfinite Gruppen

In diesem Kapitel soll eine Übersicht über eine Reihe von gruppentheoretischen Eigenschaften gegeben werden, in deren Mittelpunkt die Eigenschaft "klassenfinit" steht.

Offenbar sind endliche und abelsche Gruppen klassenfinit. Weiter gelten folgende Invarianzen:

III.1. $\delta \bar{K} = \bar{K}$ und $\chi \bar{K} = \bar{K}$.

III.2. $\bar{b} \wedge \bar{K} < \zeta \bar{f} . (*)$

Beweis: Sei $G = \langle S \rangle$, wo $|S| < \infty$. Dann folgt

$$|G:Z(G)| = |G:\bigcap_{s \in S} C(s)| \leq \prod_{s \in S} |G:C(s)| < \infty.$$

III.3. $\zeta \bar{f} < \bar{K}$.

Beweis: Sei $x \in G$. Wegen $Z(G) \leq C(x)$ gilt

$$|G:C(x)| \leq |G:Z(G)| < \infty.$$

III.4. $\zeta \bar{f} < \kappa \bar{f}$.

Beweis: Sei $G = \sum_{i=1}^n x_i Z(G)$ eine Nebenklassendarstellung. Dann wird G' durch die endliche Menge $\{[x_i, x_j] \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ erzeugt. Wegen III.3. und III.1. ist demnach G' eine $\bar{b} \wedge \bar{K}$ -Gruppe. Die Abbildung $\varphi: G \rightarrow Z(G)$, definiert durch $\varphi(x) := x^n$, ist ein Homomorphismus, die sog. Verlagerung ins Zentrum (zurückgehend auf I.SCHUR, vgl. [13], 3.5.). Da $Z(G)$ abelsch ist, gilt $G' \leq \text{Ker } \varphi = \{x \in G \mid x^n = 1\}$. Also ist G' auch ordnungsfinit. Nach I.9. folgt die Endlichkeit von G' . ||

(*) Die strikten Implikationen werden am Ende dieses Kapitels durch Gegenbeispiele belegt.

III.5. $\kappa f < \hat{\kappa}$.

Beweis: Sei $x \in G$. Da $x^y = x[x, y]$ ist, gilt

$|\{x^y \mid y \in G\}| \leq |xG| < \infty$, d.h. x hat nur endlich viele Konjugierte in G : $\hat{\kappa}(G) = 1$.

III.6. $\hat{\kappa}(G) = 1$, $U \leq G$, $|G:C(U)| < \infty \implies U \leadsto Z(G)$.

Beweis: Sei $G = \sum_{i=1}^n x_i C(U)$ Nebenklassendarst..

Dann ist $Z(G) = C(C(U)) \cap \bigcap_{i=1}^n C(x_i)$. Allgemein

ist eine Teilmenge $S \subseteq G$ in ihrem zentralen Abschluß $C(C(S))$ enthalten (vgl. [13] 3.2.22.). Also:

$$\begin{aligned} |U:U \cap Z(G)| &= |U:U \cap C(C(U)) \cap \bigcap_{i=1}^n C(x_i)| \\ &= |U:U \cap \bigcap_{i=1}^n C(x_i)| \leq |G: \bigcap_{i=1}^n C(x_i)| < \infty. \end{aligned}$$

III.7. $\hat{\kappa} < \zeta \lambda^* f$.

Beweis: Wegen $\chi \hat{\kappa} = \hat{\kappa}$ (III.1.) und $\lambda^* f = 0 \wedge \hat{\kappa}$

(I.10.) genügt es, $\hat{\kappa} < \zeta 0$ zu zeigen. Sei $x \in G$.

Mit $C(x) = C(\langle x \rangle)$ und $|G:C(x)| < \infty$ folgt nach III.6.

$\langle x \rangle \leadsto Z(G)$, d.h. zu x existiert ein $n = n(x) \in \mathbb{N}$ mit $x^n \in Z(G)$. Somit ist $G/Z(G)$ ordnungsfin.

III.8. $\zeta \lambda f < \lambda \zeta f$.

Beweis: Es ist zu zeigen: jeder endliche Komplex

liegt in einer ζf -Untergruppe. Wegen $\zeta f < \hat{\kappa}$,

$\delta \hat{\kappa} = \hat{\kappa}$ und $\delta \wedge \hat{\kappa} < \zeta f$ können wir sogar zeigen:

jede endlich-erzeugbare Untergruppe von G ist ζf -

Gruppe. Sei also $U \leq G$ endlich-erzeugt. Dann ist

$UZ(G)/Z(G) \leq G/Z(G)$ endlich-erzeugt, also wegen

$\zeta \lambda f(G) = 1$ endlich. Mit $U \cap Z(G) \leq Z(U)$ folgt:

$U/Z(U) \cong U \cap Z(G) / Z(U) \cap Z(G)$, sodaß $U/Z(U)$

epimorphes Bild einer endlichen Gruppe ist.

III.9. $\lambda \zeta f = \lambda \kappa f = \lambda \bar{h}$.

Beweis: Es gilt $\bar{b} \wedge \bar{h} < \zeta f < \kappa f < \bar{h}$, also

$\bar{b} \wedge \bar{h} = \bar{b} \wedge \zeta f = \bar{b} \wedge \kappa f$, woraus der Satz folgt.

III.10. $\lambda \kappa f < \kappa \lambda f$.

Beweis: Sei S eine endliche Teilmenge von G' . Die Elemente von S sind endliche Produkte von Kommutatoren. Sei T die endliche Menge aller in diesen Kommutatoren auftretenden Elemente von G . Nach Voraussetzung liegt T in einer κf -Gruppe. Wegen $\kappa f < \bar{h}$, $\delta \bar{h} = \bar{h}$ und $\bar{b} \wedge \bar{h} < \kappa f$ ist $\langle T \rangle$ selbst κf -Gruppe. Offenbar ist $S \subseteq \langle T \rangle'$, d.h. S liegt in einer endlichen Untergruppe von G' . Also ist $\kappa \lambda f(G) = 1$. ||

Da eine λf -Gruppe ordnungsfinis ist, hat man als triviale weitere Implikation: $\kappa \lambda f < \kappa O$.

III.11. $\kappa O < O f$, d.h. in einer κO -Gruppe bilden die Elemente endlicher Ordnung eine Untergruppe $O(G)$.

Beweis: Sind x, y Elemente endlicher Ordnung, so existiert ein $n = n(x, y) \in \mathbb{N}$ mit $x^n = y^n = 1$. Da G/G' abelsch ist, folgt $(xy)^n G' = x^n y^n G' = G'$, d.h. $(xy)^n \in G'$. Wegen $O(G') = 1$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so daß $(xy)^{nm} = 1$, d.h. auch xy hat endliche Ordnung. Offenbar hat mit x auch x^{-1} endliche Ordnung, womit die Behauptung bewiesen ist. ||

Insgesamt haben wir bisher folgende Kette von Implikationen bewiesen:

III.12.

$\bar{b} \wedge \bar{h} < \zeta f < \kappa f < \bar{h} < \zeta \lambda f < \zeta \lambda f < \lambda \bar{h} < \kappa \lambda f < \kappa O < O f$. ||

An der Stelle $\zeta \lambda f$ tritt noch eine interessante "Verzweigung" der Kette auf, die nun behandelt werden soll.

III.13. $\zeta \lambda^* f \leq \lambda^* \zeta f$.

Beweis: Sei $S \subseteq G$ eine endliche Teilmenge. Nach Voraussetzung ist $SZ(G) \subseteq N/Z(G) \trianglelefteq G/Z(G)$, wobei $|N:Z(G)| < \infty$. Also folgt $S \subseteq N \trianglelefteq G$, so daß wegen $Z(G) \leq Z(N)$ auch $|N:Z(N)| < \infty$ ist. Es gilt also $\lambda^* \zeta f(G) = 1$.

III.14. $\lambda^* \zeta f \leq \lambda^* \kappa f$.

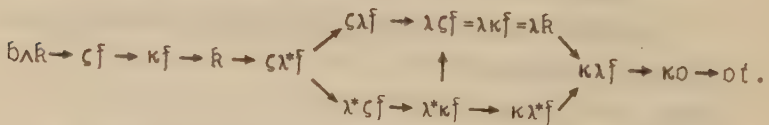
Beweis: III.4..

III.15. $\lambda^* \kappa f < \kappa \lambda^* f$.

Beweis: Nach III.12. gilt: $\lambda^* \kappa f < \lambda \kappa f < \kappa \lambda f < \kappa O$. Nach I.10. $\lambda^* f = O \wedge R$ bleibt noch zu zeigen, daß G' klassenfinit ist. Wir zeigen sogar mehr: $G' \leq F(G)$. Ist nämlich $x \in G'$, so sei $S_x \subseteq G$ die endliche Menge der in dem Kommutatorprodukt x auftretenden Elemente von G . Nach Voraussetzung ist $S_x \subseteq N \trianglelefteq G$ mit $\kappa f(N) = 1$. Nun haben wir $x \in \langle S_x \rangle' \leq N' \trianglelefteq N \trianglelefteq G$, woraus $N' \trianglelefteq G$ folgt. Das Element x liegt also in einem endlichen Normalteiler von G , d.h. $x \in F(G)$.

III.16. $\kappa \lambda^* f < \kappa \lambda f$. //

Wir haben damit III.12. zu folgender verzweigten Kette erweitert:

III.17.

Aus dem Beweis von III.15. ziehen wir noch den Schluß:

III.18. $\lambda^* \kappa f \leq \varphi^2 i$, d.h. eine $\lambda^* \kappa f$ -Gruppe ist R -nilpotent von Klasse 2.

Beweis: Aus dem Beweis zu III.15. ist ersichtlich, daß in einer $\lambda^* \kappa f$ -Gruppe $G' \leq F(G)$ gilt, d.h. $G/F(G)$ ist abelsch. Wie eingangs bemerkt, sind abelsche Gruppen klassenfinit, so daß hier gilt: $F(G/F(G)) = F_2(G)/F(G) = G/F(G)$, also $F_2(G) = G$. G ist k -nilpotent von Klasse 2. (vgl. hierzu auch [5], Corollary 3).

Dem bisher Bewiesenen ist insbesondere zu entnehmen, daß f , $\lambda^* f$ und λf Eigenschaften sind, welche den Satz

$$\zeta e < \kappa e \quad (e \in \mathcal{E}) \quad \text{erfüllen.}$$

Hiervon ausgehend wollen wir diese Implikation auf höhere Glieder der Zentralreihe bzw. Kommutatorreihe ausdehnen. Wir beginnen mit

III.19. Erfüllt $e \in \mathcal{E}$ die Invarianz $\chi e = e$, so gilt

$$\zeta \kappa e < \kappa \zeta e.$$

Beweis: $(G/Z(G))' = G'Z(G)/Z(G) \cong G'/G' \cap Z(G)$.

Wegen $G' \cap Z(G) \leq Z(G')$ ist

$$G'/Z(G') \cong G'/G' \cap Z(G) / Z(G')/G' \cap Z(G).$$

Nach Voraussetzung ist $e(G'/G' \cap Z(G)) = 1$, also

mit $\chi e = e$ auch $e(G'/Z(G')) = 1$, d.h. $\kappa \zeta e(G) = 1$.

III.20. Ist $e \in \mathcal{E}$ mit $\chi e = e$ und $\zeta e < \kappa e$ gegeben, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $\zeta^n e < \kappa^n e$.

Beweis:

Wir beweisen durch Induktion folgende Kette:

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \zeta^{n+2} e < \kappa \zeta \kappa^n e < \kappa^{n+2} e.$$

$$n=0: \zeta e < \kappa e \Rightarrow \zeta^2 e < \zeta \kappa e < \kappa \zeta e \quad (\text{III.19.})$$

$$\zeta e < \kappa e \Rightarrow \kappa \zeta e < \kappa^2 e.$$

$$\text{Insgesamt also: } \zeta^2 e < \kappa \zeta e < \kappa^2 e.$$

Induktionsschluß: $n-1 \rightarrow n$:

$$\begin{aligned}\zeta^{n+2}e &= \zeta\zeta^{n+1}e < \zeta\kappa^{n+1}e = \zeta\kappa(\kappa^n e) < \\ &< \kappa\zeta\kappa^n e = \kappa\zeta\kappa\kappa^{n-1}e < \kappa\kappa\zeta\kappa^{n-1}e < \\ &< \kappa\kappa^{n+1}e = \kappa^{n+2}e.\end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, daß aus $\chi e = e$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $\chi(\kappa^n e) = \kappa^n e$ folgt, was leicht zu sehen ist. ||

Da $i, f, \lambda^* f, \lambda f$ sämtlich der Invarianz $\chi e = e$ genügen, folgt aus III.20.:

III.21. Für jede natürliche Zahl n gilt:

- (1) $\zeta^n i < \kappa^n i$, d.h. ist G nilpotent von Klasse n , so ist G auflösbar von Stufe $m \leq n$.
- (2) $\zeta^n f < \kappa^n f$, $\zeta^n \lambda^* f < \kappa^n \lambda^* f$, $\zeta^n \lambda f < \kappa^n \lambda f$, d.h. ist die Faktorgruppe $G/Z_n(G)$ endlich (lokal-normal, lokal-endlich), so ist auch $G^{(n)}$ endlich (lokal-normal, lokal-endlich).

Bemerkung: Für III.21. (1) gibt es folgende genauere Abschätzung $m \leq 1 + \log_2 n$ (siehe [14], 364).

Wir wollen nun einige der in III.17. auftretenden Eigenschaften genauer charakterisieren. Erstes Ziel ist eine Strukturaussage über $\hat{K}$ -Gruppen. Dabei wird die zentrale Erweiterung von Gruppen eine Rolle spielen. Folgende Notation sei ad hoc vereinbart:

Definition: Für $e, e' \in \mathcal{E}$ sei $e \circledast e'$ definiert durch:

$$\begin{aligned}e \circledast e' (G) &= 1 \iff G \text{ ist zentrale Erweiterung} \\ 1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow G/N \rightarrow 1, & \text{ wo } N \leq Z(G), \\ e \quad \quad \quad e'\end{aligned}$$

In gewissen Fällen kann man zentrale Erweiterungen $e \circledast e'$ durch gewöhnliche Erweiterungen $e \rightarrow e'$ beschreiben, wozu der folgende Satz dient.

Zuvor eine weitere Definition:

Definition: $e \in \mathcal{E}$ heißt reduzibel, falls stets gilt:

$$e(G/N) = e(G/M) = 1 \implies e(G/N \cap M) = 1.$$

III.22. Für $e, e' \in \mathcal{E}$ mit

(i) $\delta^* e = e$ und (ii) $\chi e' = e'$, e' reduzibel gilt: $e \circledast e' = e e' \wedge \zeta e'$.

Beweis: " $<$ " $e \circledast e' \leq e e'$ ist trivial. Für eine

$$\text{zentrale Erweiterung } 1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow G/N \rightarrow 1$$

$\quad \quad \quad e \quad \quad \quad e'$

ist $G/Z(G) \cong G/N / Z(G)/N$ wegen $\chi e' = e'$ eine e' -Gruppe, d.h. $\zeta e'(G) = 1$.

$$">" \text{ Sei } 1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow G/N \rightarrow 1 \text{ vorgegeben.}$$

$\quad \quad \quad e \quad \zeta e' \quad e'$

$$\text{Betrachte dann } 1 \rightarrow N \cap Z(G) \rightarrow G \rightarrow G/N \cap Z(G) \rightarrow 1.$$

Wegen $\delta^* e = e$ ist $N \cap Z(G)$ eine e -Gruppe, und $G/N \cap Z(G)$ ist e' -Gruppe, da e' reduzibel ist.

$$\text{Also gilt } e \circledast e'(G) = 1. \parallel$$

Bevor wir die Eigenschaft $\mathcal{R}$ durch zentrale Erweiterung charakterisieren, sei noch etwas zu den reduziblen Gruppeneigenschaften bemerkt.

III.23. Erfüllt $e \in \mathcal{E}$ eine der folgenden Bedingungen, so

ist e reduzibel:

(i) $\delta^* e = e$ und $e e = e$.

(ii) $\delta e = e$ und direkte Produkte von e -Gruppen sind e -Gruppen.

Beweis: (i) Ist $e(G/M) = e(G/N) = 1$, so betrachte

$$1 \rightarrow M/M \cap N \rightarrow G/M \cap N \rightarrow G/M \rightarrow 1. \text{ Dabei ist}$$

$$M/M \cap N \cong MN/N \trianglelefteq G/N \text{ wegen } \delta^* e = e \text{ eine } e\text{-Gruppe.}$$

Demnach ist $G/M \cap N$ $e e$ -Gruppe, also nach Voraussetzung auch e -Gruppe.

(ii) $G/M \cap N$ kann als Untergruppe des direkten

Produktes $G/M \times G/N$ aufgefaßt werden. $\parallel$

III.24. Es seien $e, e', \xi \in \mathfrak{E}$ mit

$$\delta^* e = e, \delta^* e' = e', e \wedge e' = 1 \quad \text{und } \xi \text{ reduzibel.}$$

Dann gilt $e\xi \wedge e'\xi = \xi$.

Beweis: Vorgegeben seien zwei Erweiterungen von G :

$$1 \xrightarrow{e} N \rightarrow G \xrightarrow{\xi} G/N \rightarrow 1 \quad \text{und}$$

$$1 \xrightarrow{e'} M \rightarrow G \xrightarrow{\xi} G/M \rightarrow 1. \quad \text{Betrachte dann}$$

$1 \rightarrow N \cap M \rightarrow G \rightarrow G/(N \cap M) \rightarrow 1$. Aus den drei ersten Voraussetzungen folgt: $N \cap M = 1$. Da ξ reduzibel ist, ist $G = G/(N \cap M)$ ξ -Gruppe. – Die Umkehrung $\xi \leq e\xi \wedge e'\xi$ ist trivial.

III.25. O und $\hat{K}$ sind reduzible Gruppeneigenschaften.

Beweis: (a) Sind G/N und G/M ordnungsfinit, so auch G/N und $N/(N \cap M) \cong NM/M \trianglelefteq G/M$. Daraus folgt, daß $G/(N \cap M)$ ordnungsfinit ist.

(b) Sind G/N und G/M klassenfinit und ist $x \in G$, so folgt: $|G/N : C(xN)| < \infty$ und $|G/M : C(xM)| < \infty$.

Benutzt man die Notation des Kommutatorquotienten:

$A + B := \{g \in G \mid [g, b] \in A \text{ für alle } b \in B\}$ für Normalteiler $A \trianglelefteq G$ und $B \trianglelefteq G$, so bedeutet das:

$$|G/N : N + x/N| = |G : N + x| < \infty \quad \text{und}$$

$$|G/M : M + x/M| = |G : M + x| < \infty. \quad \text{Demnach ist}$$

$|G : (N + x) \cap (M + x)| < \infty$. Beachtet man noch, daß $(N + x) \cap (M + x) = (N \cap M) + x$ gilt, so gilt für alle $x \in G$: $|G/(N \cap M) : C(x(N \cap M))| < \infty$, d.h. $G/(N \cap M)$ ist klassenfinit. ||

Wir haben in III.12. gesehen, daß klassenfiniten Gruppen $O\hat{K}$ -Gruppen sind. Entscheidend ist nun, daß sie auch vom "umgekehrten" Typ sind: $\hat{K} < O$, d.h. es gibt in klassenfiniten Gruppen einen torsionsfreien Normalteiler mit ordnungsfiniter Faktorgruppe.

III.26. $\hat{K} \leq \text{f}(\mathbb{Z})^{\text{f}}$.

Bemerkung: Der folgende Beweis beruht auf der Angabe eines speziellen Isoklinismus' (vgl. [10]).

Beweis: Sei G eine klassenfinite Gruppe. Wegen $\hat{K} < O$ können wir folgende Menge betrachten:

$$\mathcal{M} := \{ H \leq Z(G) \mid H \cap O(G) = 1 \}.$$

$\mathcal{M} \neq \emptyset$, da $1 \in \mathcal{M}$. Sei N maximales Element in $\mathcal{M}$;

N ist also torsionsfreier zentraler Normalteiler von G . Sei $\varphi: G \rightarrow G/N$ der kanonische Epimorphismus. Dann gilt: $Z(G\varphi) = Z(G)\varphi$. Denn einerseits

ist klar, daß $Z(G)\varphi \leq Z(G\varphi)$. Ist andererseits

$g \notin Z(G)$, d.h. es gibt ein $h \in G$ mit $[g, h] \neq 1$,

so gilt wegen $\hat{K} < O$ $G' \leq O(G)$ und demnach auch

$N \cap G' = 1$, d.h. $[g, h] \notin \text{Ker}\varphi$. Also ist $[g, h]\varphi =$

$[g\varphi, h\varphi] \neq 1$, und somit $g\varphi \notin Z(G\varphi)$. Also haben wir

auch die umgekehrte Inklusion $Z(G\varphi) \leq Z(G)\varphi$.

Aufgrund der Maximalität von N in $\mathcal{M}$ sieht man wei-

ter, daß jede nichttriviale Untergruppe von $Z(G\varphi)$

die Torsionsgruppe $O(G\varphi)$ nichttrivial trifft.

Falls nämlich anderenfalls $1 < U/N \leq Z(G/N) = Z(G)/N$ mit $U/N \cap O(G/N) = 1$ existiert, so folgt:

$(U \cap O(G))\varphi \leq U\varphi \cap O(G)\varphi \leq U\varphi \cap O(G\varphi) = 1$, d.h.

$U \cap O(G) \leq N \cap O(G) = 1$, also $U \in \mathcal{M}$ und $N < U$,

was ein Widerspruch ist. Insbesondere trifft also

jede zyklische Untergruppe von $Z(G/N)$ die Tor-

sionsgruppe $O(G/N)$, d.h. $O(Z(G/N)) = 1$. Aufgrund

von $\hat{K} < O$ und $\chi \hat{K} = \hat{K}$ ist demnach G/N eine $O =$

O -Gruppe. Mithin ist $1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow G/N \rightarrow 1$

eine zentrale O -Erweiterung, was zu zeigen war.

III.27. (Tschernikow[19]) $k = t \circledast \lambda^* f$.

Beweis: " $\leq$ " : III.26..

$$t \circledast \lambda^* f = t \circledast \lambda^* f \wedge \zeta \lambda^* f \quad \text{nach III.22. und III.25.}$$

$$t \circledast \lambda^* f \wedge \zeta \lambda^* f \leq t k \wedge 0 k \quad \text{nach III.12.}$$

$$t k \wedge 0 k = k \quad \text{nach III.24. und III.25.}$$

$$\text{Also gilt auch } t \circledast \lambda^* f \leq k. \quad \parallel$$

Als äquivalente Formulierung von III.27. gemäß III.22.

sei noch vermerkt:

III.28. $k = \zeta \lambda^* f \wedge t \lambda^* f$. $\parallel$

Für endlich-erzeugte k -Gruppen erhalten wir als einfache Folgerung folgende Charakterisierung (vgl.

[13], 15.1.17.) :

III.29. $b \wedge k = (b \wedge t) \circledast f = \zeta f \wedge (b \wedge t) f$.

Beweis: $b \wedge k = b \wedge t \circledast \lambda^* f = (b \wedge t) \circledast f$.

$$b \wedge k = b \wedge \zeta \lambda^* f \wedge t \lambda^* f = \zeta f \wedge (b \wedge t) f. \parallel$$

III.29. besagt, daß eine endlich-erzeugbare klassenfinite Gruppe eine zentrale freie abelsche Untergruppe von endlichem Rang und endlichem Index besitzt. Umgekehrt kann man die $b \wedge k$ -Gruppen auch als torsionsfrei-abelsche Erweiterungen endlicher Gruppen kennzeichnen (bemerkenswert in diesem Zusammenhang ist das "rearrangement" lemma 7.1.9. in [13]: $f(a \wedge b \wedge t) < (a \wedge b \wedge t) f$):

III.30. $b \wedge k = f(a \wedge b \wedge t)$.

Beweis: ">": $f(a \wedge b \wedge t) < f a = \kappa f < k$ und

$$f(a \wedge b \wedge t) < f b = b.$$

"<": Nach III.12. ist $b \wedge k < \kappa 0 < 0 t$. Also ist $0(G)/G'$ Untergruppe der $b \wedge a$ -Gruppe G/G' . Wegen $0 \wedge b \wedge a = f$ (Fundamentalsatz für abelsche Gruppen) ist $|0(G):G'| < \infty$. Wiederum nach III.12.: $b \wedge k < \kappa f$ folgt, daß $0(G)$

endlich ist. Damit haben wir die gewünschte Erweiterung:

$$1 \rightarrow \underset{f}{O(G)} \rightarrow G \rightarrow \underset{a \wedge b \wedge f}{G/O(G)} \rightarrow 1. \quad \parallel$$

Zur Charakterisierung von Gruppen mit endlicher Faktorgruppe $G/Z(G)$ benötigen wir:

III.31. $a f \wedge k = \zeta f$.

Beweis: ">" ist klar wegen III.3.. Sei umgekehrt

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow \underset{a}{A} \rightarrow \underset{k}{G} \rightarrow \underset{f}{G/A} \rightarrow 1 \text{ vorgegeben. Da } A \text{ abelsch} \\ \text{ist, gilt } |G:C(A)| \leq |G:A| < \infty, \text{ so da\ss nach} \\ \text{III.6. folgt: } |A:ANZ(G)| < \infty. \text{ Folglich gilt} \\ |G:Z(G)| = |G:AZ(G)| |AZ(G):Z(G)| = \\ = |G:AZ(G)| |A:A \cap Z(G)| < \infty : \zeta f(G)=1. \end{aligned}$$

III.32. $\zeta f = a f \wedge f a$.

Beweis: "<" klar wegen $\zeta f < \kappa f = f a$.

">" Da $f a = \kappa f < k$, ist III.31. anwendbar:

$$a f \wedge f a \leq a f \wedge k = \zeta f. \quad \parallel$$

Schließlich kann man mittels III.31. folgende Kriterien, die in diesem Zusammenhang interessant sind, beweisen (vgl. hierzu [10]):

III.33. $\zeta f = k \wedge (\zeta f) f$.

Beweis: "<" ist klar nach III.3..

$$\begin{aligned} ">" \text{ Sei } 1 \rightarrow \underset{\zeta f}{N} \rightarrow \underset{k}{G} \rightarrow \underset{f}{G/N} \rightarrow 1 \text{ vorgegeben.} \\ \text{Dann ist } |G:Z(N)| = |G:N| |N:Z(N)| < \infty \text{ und} \\ Z(N) \trianglelefteq N \trianglelefteq G, \text{ d.h. } Z(N) \trianglelefteq G, \text{ so da\ss } a f(G)=1. \\ \text{Mittels III.31. folgt die Behauptung.} \end{aligned}$$

III.34. $\kappa f = k \wedge (\kappa f) f$.

"<" ist klar nach III.5..

$$">" \text{ Sei } 1 \rightarrow \underset{\kappa f}{N} \rightarrow \underset{k}{G} \rightarrow \underset{f}{G/N} \rightarrow 1 \text{ vorgegeben.}$$

Es ist $N' \trianglelefteq N \trianglelefteq G$, d.h. $N' \trianglelefteq G$, und es gilt

$G/N \cong G/N' / N/N'$, also $\alpha f(G/N') = 1$.

Nach III.31. und III.4. : $\alpha f \wedge k < \zeta f < \kappa f$ ist $(G/N')' = G'/N'$ endlich, so daß G' eine $f f = f$ -gruppe ist. Damit ist $\kappa f(G) = 1$ nachgewiesen. ||

Über den klassenfiniten Anteil $F(G)$ einer Gruppe gibt es einen bemerkenswerten Satz von BAER [2]:

III.35. Ist $N \trianglelefteq G$ endlich-erzeugbar und $N \rightsquigarrow Z(G)$, so gilt $N \trianglelefteq F(G)$.

Beweis: Aus $\zeta(N) = 1$ und $N \rightsquigarrow Z(G)$ folgt $(\alpha \wedge \beta)(N \cap Z(G)) = 1$. Also ist $O(N \cap Z(G))$ endlich. Da $N \trianglelefteq G$, liegen die Konjugierten $\{x^g \mid g \in G\}$ eines Elementes $x \in N$ alle in N . Entsprechend $|N : N \cap Z(G)| < \infty$ ist nur noch zu zeigen, daß in einer Nebenklasse mod $N \cap Z(G)$ nur endlich viele Konjugierte von x liegen. Dazu sei o.B.d.A. die Klasse $x(N \cap Z(G))$ betrachtet. Sei $x^g \equiv x \pmod{Z(G)}$; es gibt ein $z \in Z(G)$ mit $x^g = xz$. Zu x existiert $n = n(x) \in N$ mit $x^n \in Z(G)$. Nun gilt: $x^n = (x^n)^g = (x^g)^n = (xz)^n = x^n z^n$, also $z^n = 1$, d.h. $z \in O(N \cap Z(G))$. Für z bleiben also nur endlich viele Möglichkeiten, was zu zeigen war. ||

Wir erhalten hieraus eine weitere Charakterisierung von klassenfiniten Gruppen:

III.36. $\zeta \lambda^* f \wedge \lambda^* b = k$.

Beweis: ">" klar nach III.7. und Definition von k .

"<" Zu $x \in G$ existiert ein $N \trianglelefteq G$ mit $x \in N$ und $\zeta(N) = 1$. Dann ist auch $\zeta(N \cap Z(G) / Z(G)) = 1$, wobei diese Gruppe normal in $G/Z(G)$ ist. Aus $\zeta \lambda^* f(G) = 1$ folgt $|N : N \cap Z(G)| < \infty$, d.h. $N \rightsquigarrow Z(G)$. Mit III.35. folgt $x \in N \trianglelefteq F(G)$, d.h. G ist klassenfinit. ||

Wenden wir uns noch etwas genauer den lokal-klassenfiniten Gruppen zu. Zunächst sei vermerkt:

$$\text{III.37. } \lambda \bar{K} \wedge 0 = \lambda f.$$

Beweis: Unter Verwendung von I.9. gilt:

$$\lambda \bar{K} \wedge 0 = \lambda \bar{K} \wedge \lambda 0 = \lambda(\bar{K} \wedge 0) = \lambda(\bar{b} \wedge \bar{K} \wedge 0) = \lambda f. \parallel$$

Aus dem Beweis zu III.27. ersieht man sofort:

$$\text{III.38. } \bar{K} = \kappa 0 \wedge f \bar{K} \parallel$$

Ein Analogon zu diesem Resultat kann man auch für $\lambda \bar{K}$ -Gruppen zeigen:

$$\text{III.39. } \lambda \bar{K} = 0 \wedge f(\lambda \bar{K}).$$

Beweis: "<" ist klar nach III.12..

$$">" \text{ Sei } \begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & N & \rightarrow & G & \rightarrow & G/N \rightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \bar{K} & & 0 & & \lambda \bar{K} \end{array} \text{ vorgegeben.}$$

und sei $S \subset G$ eine endliche Teilmenge. Dann ist $\langle S \rangle N/N$ ($\bar{b} \wedge \bar{K}$)-Untergruppe von G/N . Aufgrund der

Implikation $\bar{b} \wedge \bar{K} \leq \kappa f$ ist $(\langle S \rangle N/N)' = \langle S \rangle' N/N$

endlich. Andererseits ist $\langle S \rangle' \cap N \leq G' \cap N = 1$

wegen der Voraussetzungen. Das ergibt:

$$\langle S \rangle' N/N \cong \langle S \rangle' / \langle S \rangle' \cap N = \langle S \rangle' \text{ ist endlich. Beach-}$$

tet man noch III.9., so ist der Satz bewiesen. $\parallel$

Hier ist noch zu bemerken, daß ein torsionsfreier Normalteiler einer lokal-klassenfiniten Gruppe im Zentrum liegt (das gleiche gilt für den Fall der klassenfiniten Gruppen). Es scheint jedoch schwierig zu sein, über die Situation torsionsfreier Elemente oder Untergruppen in $\lambda \bar{K}$ -Gruppen etwas auszusagen.

Es sei noch erwähnt, daß die Aussage III.37. kaum abzuschwächen ist. Z.B. gilt:

$$\text{III.40. } 0 \nless \kappa \lambda f.$$

Beweis: Anderenfalls hätte man mittels

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & G' & \rightarrow & G & \rightarrow & G/G' \rightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \lambda f & & 0 & & \kappa \lambda 0 \end{array} \text{ aufgrund der Tatsache}$$

$\alpha \wedge 0 < \lambda f$ die Folgerung $\lambda f \lambda f(G) = 1$. Nach einem Satz von O. Yu. SCHMIDT (vgl. [12], p.108) gilt $\lambda f \lambda f = \lambda f$, so daß folgen würde $0 < \lambda f$. Das wird aber durch relativ einfache Beispiele von E.S.GOLOD und I.R.SCHAFAREWITSCH widerlegt (vgl. hierzu [7], ch.8). ||

Schließlich haben wir als Verbindung zu I die bemerkenswerten Resultate von B.H.NEUMANN [10], von denen das zweite schon in II benutzt wurde:

- III.41. (i) $\zeta f(G) = 1 \iff$ Jede Untergruppe von G ist schwachnormal in G .
 (ii) $\kappa f(G) = 1 \iff$ Jede Untergruppe von G ist oberfastnormal in G .

I.I.EREMIN [4] hat folgende Verschärfung von III.41.(i) gezeigt:

- III.42. $\zeta f(G) = 1 \iff$ Jede abelsche Untergruppe von G ist schwachnormal in G .

Bei I.D.MACDONALD [21], p.36 findet sich die Bemerkung, daß man ein analoges Resultat für III.41.(ii) ebenfalls unter Verwendung der in [10] gegebenen Mittel beweisen kann.

Aus III.41.(i) kann man noch eine bemerkenswerte Folgerung für die Norm einer Gruppe ziehen.

Definition. $\|G\| := \bigcap_{U \leq G} N(U)$ heißt die Norm von G .

(vgl. BAER [1]).

Die Norm ist eine charakteristische Untergruppe. Es gilt:

- III.43. $|G : \|G\|| < \infty \implies |G : Z(G)| < \infty$.

Beweis: Es gilt offenbar $Z(G) \leq \|G\|$. Falls $G/\|G\|$ endlich ist, so ist nach Definition von $\|G\|$ jede Untergruppe schwachnormal. Nun liefert Anwen-

derung von III.41.(i) die Behauptung. ||

Es wäre interessant, einen von dem Neumannschen Resultat unabhängigen Beweis für die letzte Aussage zu finden.

Wir bringen nun die noch ausstehenden Gegenbeispiele, welche die angegebenen strikten Implikationen beweisen:

III.2. $b \wedge k < \zeta f$: Prüfergruppe Z_{p^∞} (p Primzahl)

III.3. $\zeta f < k$: $G = \bigtimes_{n=5}^{\infty} A_n$ (alternierende Gruppen)
 $Z(G) = 1$, aber $G \in k$.

III.4. $\zeta f < \kappa f$: $G = \langle b, (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid [a_i, b], [a_i, a_j] b^{-1}$
für $i \neq j \rangle$
 $G' = Z(G) = \langle b \rangle$. (s. ERDÖS [22]).

III.5. $\kappa f < k$: G in III.3. ist perfekt: $G = G'$.

III.7. $k < \zeta \lambda^* f$: $G = \langle (a_i)_{i \in \mathbb{N}}, (b_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid a_i^2, b_i^2,$
 $[a_i, b_j], [a_i, a_j], [b_i, b_j] a_j^{-1} a_i^{-1} \rangle$
 $G/Z(G)$ hat Exponent 2 und ist abelsch,
da $G' \leq Z(G) = \langle a_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$. $G \notin k$.
Vgl. HAIMO [5].

$\zeta \lambda^* f < \zeta \lambda f$: S_∞ , die symmetrische Gruppe der finiten Permutationen, ist λf -Gruppe mit
 $Z(S_\infty) = 1$, aber nicht lokal-normal.

III.8. $\zeta \lambda f < \lambda k$: $G = \text{Hol}(Z_{p^\infty}, \langle \alpha \rangle)$, wo $\alpha \in \text{Aut}(Z_{p^\infty})$
definiert ist: $x^\alpha = x^{1+p}$ für $x \in Z_{p^\infty}$.
 $Z(G) \cong Z_p$, so daß $G/Z(G) \cong G$. Wegen
 $o(\alpha) = \infty$ ist G nicht lokal-endlich.
Aber $G \in \lambda k$.

III.10. $\lambda \kappa f < \kappa \lambda f$: $G = A_5 \wr Z_\infty$. G' ist direktes Produkt
unendlich vieler Exemplare A_5 (vgl.
zur Theorie des Kranzproduktes die grund-
legende Arbeit von P.M.Neumann [23]).

Andererseits ist die Gruppe endlich-
erzeugt (eine Definition des Kranzpro-
duktes mittels Erzeuger und Relationen
findet sich in Ph.HALL [24], p.345) .

$\kappa\lambda f < \kappa 0$: $G \in \text{GOLOD} + \text{SAFAREVITCH}$ (s. [7] ch.8).
 G' hat die verlangte Eigenschaft, da
 $|G:G'| < \infty$ ist.

III.11. $\kappa 0 < 0f$: Freie Gruppen vom Rang ≥ 2 .

Die Verschiedenheit der in III.13. und in III.14. jeweils be-
handelten Gruppenklassen ist noch offen.

III.15. $\lambda^* \kappa f < \kappa \lambda^* f$: Man sieht sofort, daß hier das Gegenbei-
spiel zu III.10. das Gewünschte leistet.

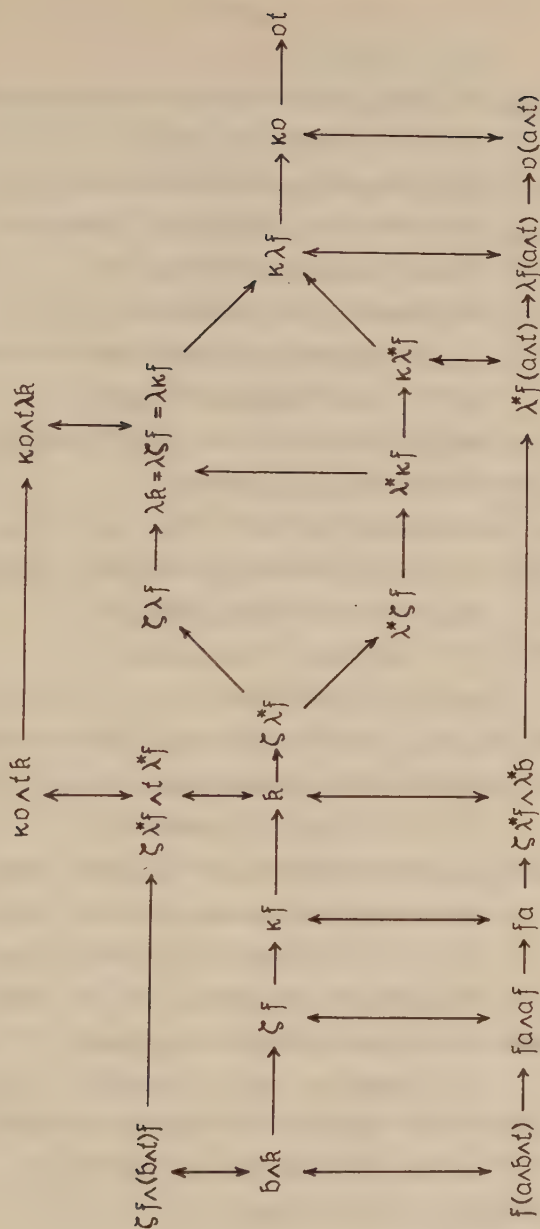
III.16. $\kappa \lambda^* f < \kappa \lambda f$: S_∞ (s.o.). Der Kommutator ist die alter-
nierende Gruppe A_∞ , welche nicht lokal-
normal ist.

Es sei noch auf die Arbeit von TOMKINSON[25] hingewiesen,
die interessante neue Aspekte der FC-Theorie enthält.

Zum Abschluß des Kapitels seien die Ergebnisse in einer
Tabelle zusammengestellt, die eine Erweiterung von III.17.
darstellt.

Das Gegenbeispiel zu III.8. verdanke ich S.E.Stonehewer, und
das Gegenbeispiel zu III.10. teilte mir P.M.Neumann mit.

Зu "R" verwandte Gruppeneigenschaften



Literaturverzeichnis

- [1] Baer, R.: Der Kern, eine charakteristische Untergruppe.
Comp.Math.1, 254-283 (1934).
- [2] ———: Finiteness properties of groups.
Duke Math.J.15, 1021-1032 (1948).
- [3] ———: Gruppen mit Minimalbedingung.
Math.Annalen 150, 1-44 (1963).
- [4] Eremin, I.I.: Gruppen mit endlichen Klassen konjugierter abelscher Untergruppen.
Mat.Sbornik 47, 45-54 (1959)(Russisch).
- [5] Haimo, F.: The FC-Chain of a Group.
Canad.J.5, 498-511 (1953).
- [6] Hall, M.: A topology for free groups and related groups.
Ann.Math.52, 127-139 (1950).
- [7] Herstein, I.N.: Noncommutative Rings.
New York: Wiley 1968.
- [8] Kargapolow, M.I.: Über konjugierte p-Sylow-Untergruppen einer lokalnormalen Gruppe. Uspechi mat.nauk
12, 297-300 (1957)(Russisch).
- [9] Müller, K.H.: Schwachnormale Untergruppen: eine gemeinsame Verallgemeinerung der normalen und normalisatorgleichen Untergruppen.
Rend.Sem.Mat.Padova 26, 129-157 (1966).
- [10] Neumann, B.H.: Groups with finite classes of conjugate subgroups. Math.Z.63, 76-96 (1955).
- [11] Ore, O.: On the application of structure theory to groups. Bull.AMS 44, 801-806 (1938).
- [12] Schenkman, E.: Group Theory.
Princeton: van Nostrand (1965).

- [13] Scott, W.R.: Group Theory.
New Jersey: Prentice-Hall 1964.
- [14] Specht, W.: Gruppentheorie. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1956.
- [15] Specht, W.: Probleme der Gruppentheorie. Manuskript.
- [16] Ströbner, H.: Sylowsätze in lokalerreichbaren Gruppen.
Dissertation: Erlangen 1968.
- [17] Suzuki, M.: Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups.
Berlin: Springer 1967.
- [18] Szép, J. und Ito, N.: Über die Faktorisierung von Gruppen. Acta Szeged 16, 229-231 (1955).
- [19] Tschernikow, S.N.: Über die Struktur von Gruppen mit endlichen Klassen konjugierter Elemente.
Dokl. Akad. Nauk SSSR 115, 60-63 (1957)
(Russisch).
- [20] Tschernikow, S.N.: Endlichkeitsbedingungen in der Gruppentheorie. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Mathematische Forschungsberichte XX 1963.
- [21] Macdonald, I.D.: Some explicit bounds in groups with finite derived groups. Proc. London M. Soc. (3) 11, 23-56 (1961).
- [22] Erdős, J.: The Theory of Groups with Finite Classes of Conjugate Elements. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 45-58, 5 (1954).
- [23] Neumann, P.M.: On the structure of standard wreath products of groups. Math. Z. 84, 343-373 (1964).

- [24] Hall, P.: The Frattini Subgroups of Finitely Generated Groups. Proc.London Math.Soc.(3) 11, 327 - 352 (1961).
- [25] Tomkinson, M.J.: Local Conjugacy Classes. Math.Z. 108, 202-212 (1969).

Lebenslauf

- 1942 geboren am 24.7. als Sohn der Eheleute
Dipl.-Ing. Arthur Meyn und Gertrud Meyn,
geb.Eising, in Berlin-Charlottenburg.
- 1948 - 1952 Besuch von Volksschulen in München und
Mülheim a.d. Ruhr.
- 1952 - 1961 Besuch des Städtischen Gymnasiums in
Mülheim a.d. Ruhr und dort
- 1961 Abitur.
- 1961 - 1966 Studium der Mathematik an der Universität
Erlangen-Nürnberg. Vorlesungen bei den
Professoren H.Bauer, H.-J.Kowalski,
W.Leopoldt, P.Lorenzen, G.Nöbeling
R.Remmert und W.Specht.
- 1964 Vordiplom in Mathematik.
- 1966 Diplom in Mathematik
- 1967 - 1969 Assistent am Mathematischen Institut
in Erlangen.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hög, 8520 Erlangen Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990
